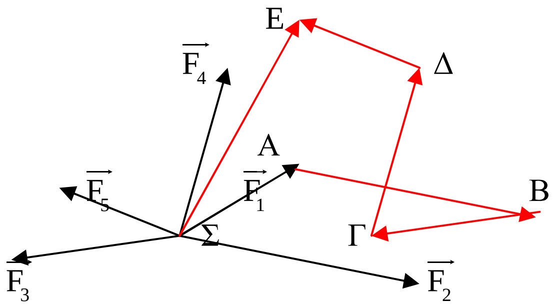
1.1 – 1.2
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 20 – 21

1.

Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, . . . $\vec{F}_5$ ασκούνται στο σώμα Σ. Ποια δύναμη χρειάζεται, ώστε να μην αφήσει το σώμα Σ να μετακινηθεί από τη θέση του;

Λύση



Θεωρούμε $\overrightarrow{ΣΑ} = \vec{F}_1$, $\overrightarrow{ΑΒ} = \vec{F}_2$, $\overrightarrow{ΒΓ} = \vec{F}_3$, $\overrightarrow{ΓΔ} = \vec{F}_4$ και $\overrightarrow{ΔΕ} = \vec{F}_5$.

Τότε $\overrightarrow{ΣΕ} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ . \ . \ . + \vec{F}_5$.

Άρα πρέπει να εφαρμοστεί δύναμη $-\overrightarrow{ΣΕ}$ αντίθετη της $\overrightarrow{ΣΕ}$.

2.

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω $\vec{α}$, $\vec{β}$, $\vec{γ}$ και $\vec{δ}$ τα αντίστοιχα διανύσματα θέσεως ως προς ένα σημείο αναφοράς Ο. Τι μπορείτε να πείτε για το τετράπλευρο ΑΒΓΔ αν:

(i) $\vec{α} + \vec{γ} = \vec{β} + \vec{δ}$ **(ii)** $|\vec{α} - \vec{γ}| = |\vec{β} - \vec{δ}|$

(iii) $\vec{α} + \vec{γ} = \vec{β} + \vec{δ}$ και $|\vec{α} - \vec{γ}| = |\vec{β} - \vec{δ}|$

Λύση

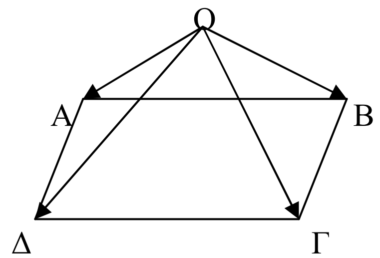
(i)

$\vec{α} + \vec{γ} = \vec{β} + \vec{δ} \Rightarrow$

$\overrightarrow{ΟΑ} + \overrightarrow{ΟΓ} = \overrightarrow{ΟΒ} + \overrightarrow{ΟΔ} \Rightarrow$

$\overrightarrow{ΟΑ} - \overrightarrow{ΟΒ} = \overrightarrow{ΟΔ} - \overrightarrow{ΟΓ} \Rightarrow$

$\overrightarrow{ΒΑ} = \overrightarrow{ΓΔ} \Rightarrow$ ΑΒΓΔ παρ/μμο



(ii)

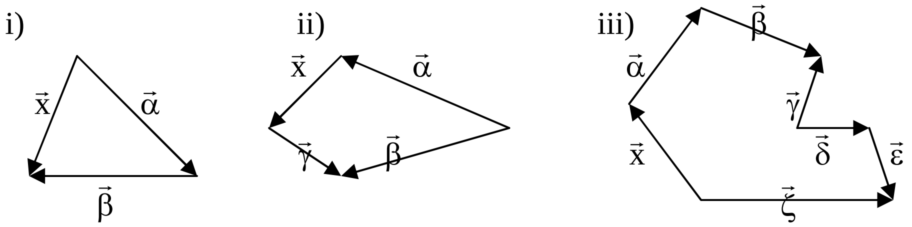
$|\vec{α} - \vec{γ}| = |\vec{β} - \vec{δ}| \Rightarrow |\overrightarrow{ΟΑ} - \overrightarrow{ΟΓ}| = |\overrightarrow{ΟΒ} - \overrightarrow{ΟΔ}| \Rightarrow$

$|\overrightarrow{ΓΑ}| = |\overrightarrow{ΔΒ}| \Rightarrow$ το ΑΒΓΔ έχει ίσες διαγώνιες

(iii)

Το ΑΒΓΔ είναι παρ/μμο με ίσες διαγώνιες, άρα είναι ορθογώνιο

3.
Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα, ως συνάρτηση των άλλων διανυσμάτων που δίνονται:
Λύση



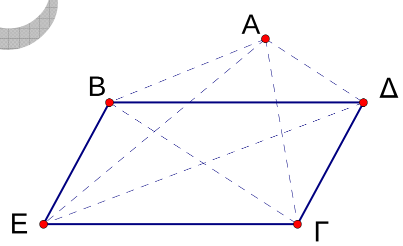
i) $\vec{x} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

ii) $\vec{x} = -\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$

iii) $\vec{x} = \vec{\zeta} - \vec{\varepsilon} - \vec{\delta} + \vec{\gamma} - \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

4.
Αν για δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ ισχύει $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AE}$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.
Λύση

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AE} \Rightarrow$
$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{A\Gamma} \Rightarrow$
$\overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{\Gamma E} \Rightarrow$ ΒΔΓΕ παραλληλόγραμμο



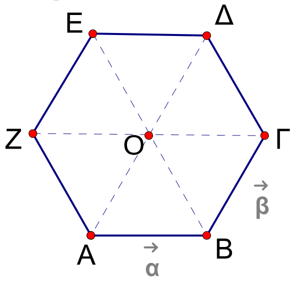
5.
Δίνονται τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ και έστω Ο το μέσο του τμήματος ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.
Λύση

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{O\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OB}$
$\overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BA}$
$\overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{AO}$ που ισχύει, αφού Ο μέσο του ΑΓ

6.

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Λύση



Θεωρούμε σημείο αναφοράς το κέντρο Ο του εξαγώνου.

Είναι $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{O\Gamma}$.

Αλλά $\overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ από παραλληλόγραμμα.

Άρα $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

7.

Για ένα τυχαίο εξάγωνο $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$ να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{P_1P_3} + \overrightarrow{P_2P_4} + \overrightarrow{P_3P_5} + \overrightarrow{P_4P_6} + \overrightarrow{P_5P_1} + \overrightarrow{P_6P_2} = \vec{0}$$

Λύση

$$\overrightarrow{P_1P_3} + \overrightarrow{P_2P_4} + \overrightarrow{P_3P_5} + \overrightarrow{P_4P_6} + \overrightarrow{P_5P_1} + \overrightarrow{P_6P_2} =$$

$$(\overrightarrow{P_1P_3} + \overrightarrow{P_3P_5} + \overrightarrow{P_5P_1}) + (\overrightarrow{P_2P_4} + \overrightarrow{P_4P_6} + \overrightarrow{P_6P_2}) = \overrightarrow{P_1P_1} + \overrightarrow{P_2P_2} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$